Наблюдение тонкой пылевой оболочки, радиально падающей в черную дыру Рейснера-Нордстрема, также падающим туда наблюдателем.

Александр Шацкий[1]

[1] *Статья опубликована в Gravitation and Cosmology, 2017, Vol. 23, No. 3, pp. 261–272.*

Выполнено инвариантное аналитическое исследование по определению красного смещения частоты света от излучающей монохромную линию сферической пылевой оболочки, которая свободно и радиально падает в чёрную дыру Рейснера-Нордстрема. Наблюдатель этого излучения также свободно и радиально падает в эту чёрную дыру вслед за оболочкой. Рассмотрены и устранены несколько распространённых парадоксов и заблуждений, свойственных подобным задачам. По результатам этого аналитического исследования написан численный код (программа), позволяющая рассчитать все сопутствующие этой модели эффекты. В итоге с помощью этой программы мной синтезированы несколько видеороликов, позволяющих красочно, количественно и в деталях описать происходящие астрофизические явления, как до горизонта чёрной дыры, так и под её горизонтом.

I. ВВЕДЕНИЕ

Мои коллеги в последнее время неоднократно сталкивались с непониманием и с заблуждением в вопросах гипотетически-возможного наблюдения некоторых эффектов от чёрных дыр. Причем это непонимание иногда исходило даже от профессиональных астрофизиков. Речь идёт о визуальных эффектах, сопровождающих свободно-падающего в чёрную дыру наблюдателя. Разумеется, пока все эти рассуждения являются чистой фантастикой – в смысле возможности технической реализации подобных наблюдений, но данная тема имеет несомненный методологический интерес, связанный с глубоким пониманием важных общерелятивистских эффектов, сопровождающих подобные гипотетические наблюдения.

Это навело моих коллег на мысль написать работу, где бы данные гипотетические наблюдения были бы подробно (и главное правильно) описаны. К сожалению, данную работу мне фактически пришлось делать самому, но, тем не менее, я благодарен коллегам за все идеи, замечания и обсуждения – см. последний раздел "Благодарности".

Особенность данной работы состоит в том, что кроме чисто методологического изучения, описания и расчета модели я также сделал несколько виртуальных видеороликов, на которых попытался отобразить именно те визуальные эффекты, которые (по идее) и должны быть видны реально-падающему в чёрную дыру наблюдателю. Эти видеоролики я выложил на открытый доступ в Интернет (см. ссылки в конце работы), и поэтому данная работа (вместе с видеороликами) может быть использована для эффективного обучения студентов соответствующих специальностей, а также для всех любителей, интересующихся данной тематикой.

Кратко о модели:

1. Представим себе свободно-падающего в чёрную дыру наблюдателя, наблюдатель падает в космическом вакууме и падает радиально.

2. Кроме наблюдателя в чёрную дыру также свободно падает пылевая сфера, которую он и наблюдает, и которая находится ближе к чёрной дыре, чем сам наблюдатель.

3. Все пылинки этой сферы также падают радиально и находятся на одном расстоянии от чёрной дыры в один и тот же момент времени.

4. Обратным влиянием всех пылинок (а также самого наблюдателя) на чёрную дыру я пренебрегаю.

Итак, о заблуждениях:

Основное заблуждение, которое я буду опровергать в данной работе, состоит в том, что наблюдатель увидит бесконечное красное смещение от пылинок, когда они достигнут горизонта чёрной дыры.

Следующее заблуждение состоит в том, что наблюдатель перестанет видеть излучение (его интенсивность станет нулевой), когда пылинки достигнут горизонта чёрной дыры.

Я сразу кратко анонсирую причину вышеуказанных заблуждений:

Дело в том, что фотонам вблизи самого горизонта в некотором смысле сложно оторваться на бесконечность – им для этого требуется большее время, чем вдали от горизонта. Поэтому наблюдатель, подлетая всё ближе и ближе к горизонту, видит фотоны, которые были излучены приблизившейся вплотную к горизонту оболочкой, в то время как сама оболочка в этот момент находится уже под горизонтом. После пересечения наблюдателем горизонта чёрной дыры, он падает к центру[1] быстрее, чем фотоны от пылинок, которые по-прежнему "пытаются вырваться наружу но гравитация "утягивает" их всё ближе к центру. И наблюдатель, падая, по-прежнему "натыкается" на эти фотоны. По этой причине никаких особенностей в наблюдении фотонов от оболочки наблюдатель видеть не будет – всё будет выглядеть гладко и непрерывно, а главное красное смещение и интенсивность будут конечными и ненулевыми!

Особо подчеркну, что этот эффект связан исключительно с тем, что наблюдатель также свободно падает в чёрную дыру вслед за оболочкой – для неподвижного (относительно чёрной дыры) наблюдателя всё выглядело бы именно так, как указано в заблуждениях!

Ещё одно распространённое заблуждение состоит в том, что под горизонтом чёрной дыры нельзя пользоваться статичными координатами Шварцшильда или Рейснера-Нордстрема – якобы потому, что под горизонтом пространство и время меняются местами. Последнее в корне неправильно – можно сказать только, что меняются местами некоторые свойства у пространства и времени, а именно: знаки у сигнатуры метрики. Время по-прежнему остаётся временем, а пространство – пространством. Поэтому статичными координатами под горизонтом пользоваться можно, иначе были бы ошибочны наши выводы о существовании сингулярности, а также о существовании и местоположении горизонта Коши для реальных чёрных дыр.

Но для корректного описания наблюдательных эффектов под горизонтом необходимо привести все формулы, описывающие эти эффекты, к инвариантному виду, что и было мной проделано в нижеследующих разделах. Как известно, величина инварианта (или скаляра) в конкретной точке пространства-времени не зависит от выбора системы координат, или системы отсчёта.

Во многих других работах мы с соавторами проделывали подобные вычисления под горизонтом в других системах и координатах – см. например [1]. Поэтому данный выбор системы координат не связан с простотой вычислений, а связан, скорее, с простотой интерпретации и понимания. Если корректно повторить дальнейшие математические

---

[1] Здесь и далее под термином "центр" я понимаю меньшие радиальные координаты r, чем те, на которых ведется рассмотрение.

выкладки, например, в сопутствующей материи и свободно-падающей системе отсчёта, то результаты будут теми же.

В качестве исходной модели я выбрал чёрную дыру Рейснера-Нордстрема, т.е. электрически заряженную. Совершенно очевидно, что в космосе не может существовать объектов с макроскопически-большим количеством электрического заряда, поэтому мой выбор решения Рейснера-Нордстрема был связан с более фундаментальными соображениями, чем простое обобщение решения Шварцшильда. И связан он вот с чем: решение Шварцшильда является нереализуемым в природе – у реальной чёрной дыры всегда будет присутствовать какое-либо вращение, т.е. реальная чёрная дыра всегда будет Керровской. В то же время Керровская чёрная дыра обладает нетривиальной топологией (в отличие от Шварцшильдовской). Это свойство топологии кардинально отличает решение Керра от решения Шварцшильда! Одним из следствий этого отличия является наличие внутреннего горизонта Коши у решения Керра, которого нет в решении Шварцшильда. Благодаря горизонту Коши в геометрии Керра пространство-время разбивается на две внутренних области – T-области между горизонтами и R2-области под внутренним горизонтом. Динамика и наблюдательные проявления в этих внутренних областях являются гораздо более сложными, интересными и многогранными, чем в одной внутренней T-области Шварцшильда... Однако, аналитическое и численное рассмотрение модели в решении Керра является несравненно более сложной задачей, чем в решении Шварцшильда. В метрике Керра невозможно даже рассмотреть сферическую пылевую оболочку – она обязательно будет искривляться и разрываться гравимагнитными силами, присутствующими в решении Керра. Максимум, чего можно было бы рассмотреть в решении Керра аналитически – это динамику тонкого пылевого кольца, падающего и вращающегося в экваториальной плоскости координат Керра.

Поэтому решение задачи в координатах метрики Рейснера-Нордстрема является неким компромиссным вариантом между реальностью и сложностью. Рассмотрение в метрике Рейснера-Нордстрема обладает примерно такой же сложностью, как и в метрике Шварцшильда. Именно по этой причине я выбрал чёрную дыру Рейснера-Нордстрема, которая также как и Керровская чёрная дыра обладает нетривиальной топологией и внутренним горизонтом Коши, и, поэтому, является более реальной, чем простейшее решение для чёрной дыры Шварцшильда. Кроме этого решение Шварцшильда, как известно, является частным случаем решения Рейснера-Нордстрема – для случая нулевого электрического заряда.

II. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

Воспользуемся простотой сферической симметрии нашей модели. Тогда закон движения (т.е. зависимость времени t от радиуса r) для сферической, тонкой пылевой оболочки, свободно и радиально падающей в черную дыру можно записать в общем виде:

$$t_{shell}(r) = t_{shell^0} + \int\limits_{r_{shell^0}}^{r} F_{shell}(r)\, dr \tag{1}$$

Здесь $F_{shell}(r)$ – некоторая функция для оболочки, которая будет определена дальше.

Аналогично для фотона, в тех же координатах, но уже в плоскости $(r,\, \theta)$, также можем написать закон движения:

$$t_{photon}(r, h) = t^{shell}_{photon}(h) + \int\limits_{r_{shell}}^{r} F_{photon}(r, h)\, dr \tag{2}$$

Здесь h – прицельный параметр фотона, напрямую связанный с углом $\theta_{shell}(h)$, на котором этот фотон был излучен с оболочки, $F_{photon}(r, h)$ – некоторая функция для фотона, которая также будет определена дальше.

Для радиально излученного фотона ($h = 0,\ \theta_{shell} = 0$) из (2) получаем время излучения его с оболочки:

$$t_{photon}(r_{shell^0}, 0) = t^{shell}_{photon}(0) = t_{shell^0} \tag{3}$$

и время достижения этим фотоном наблюдателя:

$$t_{photon}(r_{obs^0}, 0) = t_{shell^0} + \int\limits_{r_{shell^0}}^{r_{obs^0}} F_{photon}(r, 0)\, dr \tag{4}$$

Т.к. мы рассматриваем только те излученные (в разные моменты времени) с оболочки фотоны, которые одновременно достигают наблюдателя, то полагаем этот момент времени равным t_{obs^0}:

$$t_{photon}(r_{obs^0}, h) = t^{shell}_{photon}(h) + \int\limits_{r_{shell}}^{r_{obs^0}} F_{photon}(r, h)\, dr := t_{obs^0} \tag{5}$$

Момент времени излучения рассматриваемых фотонов к наблюдателю оболочкой соответствует радиусу r_{shell} оболочки, поэтому согласно (1) также имеем:

$$t_{shell}(r_{shell}) = t_{shell^0} + \int\limits_{r_{shell}}^{r_{shell^0}} F_{shell}(r)\,dr \tag{6}$$

Здесь я учёл, что более ранним моментам времени соответствуют большие радиусы и наоборот. Поэтому интеграл в (6) должен быть отрицательным, поскольку должно быть $r_{shell^0} < r_{shell}$ – для того чтобы фотон с $h > 0$ успел дойти до наблюдателя к тому же моменту времени, что и фотон с $h = 0$ – т.к. ему нужно больше времени и поэтому он должен быть излучен раньше (с большего радиуса).

Время излучения фотона с оболочки $t^{shell}_{photon}(h)$ совпадает (по определению) со временем $t_{shell}(r_{shell})$, тогда из (5) и (6) имеем:

$$t^{shell}_{photon}(h) = t_{obs^0} + \int\limits_{r_{obs^0}}^{r_{shell}} F_{photon}(r,h)\,dr = t_{shell^0} - \int\limits_{r_{shell^0}}^{r_{shell}} F_{shell}(r)\,dr \tag{7}$$

Выше я предполагал, что наблюдатель находится в момент прихода к нему фотонов t_{obs^0} на радиусе r_{obs^0}. Но наш наблюдатель также свободно падает, поэтому его координаты (и время прихода к нему фотонов) также меняются. Для учета этого достаточно заменить везде индексы нуль на текущий индекс (например на индекс k: t_{obs^k}, r_{obs^k}, t_{shell^k}, r_{shell^k}), а нулевой индекс ($k = 0$) использовать в качестве начальных условий модели (выбираем начало отсчета времени в точке $t_{obs^0} := 0$).

Тогда интеграл (7) переписывается в виде:

$$\int\limits_{r_{shell^k}}^{r_{obs^k}} \left[F_{photon}(r,h) - F_{photon}(r,0)\right]\,dr = \int\limits_{r_{shell^k}}^{r_{shell}} \left[F_{shell}(r) + F_{photon}(r,h)\right]\,dr \tag{8}$$

С помощью этого соотношения можно вычислить зависимость $r_{shell}(h)$ численно для каждого индекса k.

При этом я полагаю, что время t_{shell^k} и радиус r_{shell^k} соответствуют излучению фотона вдоль оси Z с оболочки в процессе её падения (и приходу этого фотона к наблюдателю в момент t_{obs^k}). К этому же времени t_{obs^k} и радиусу r_{obs^k} приходят фотоны, испущенные оболочкой нерадиально ($h > 0$), с радиуса оболочки r_{shell}, в момент времени t_{shell}.

Дифференцируя обе части выражения (8) по h, получаем:

$$\frac{dr_{shell}}{dh} = \left[\int\limits_{r_{shell}}^{r^k_{obk}} \frac{hr\,dr}{\left(r^2 - h^2 f\right)^{3/2}}\right] : \left[F_{shell}(r_{shell}) + F_{photon}(r_{shell}, h)\right] \tag{9}$$

Отсюда получаем зависимость $r_{shell}(h)$.

III. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Запишем метрику Рейснера-Нордстрема:

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \qquad f(r) := \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)\left(1 - \frac{r_c}{r}\right). \tag{10}$$

Здесь и далее я положил скорость света равной единице, r_h и r_c – радиусы горизонта чёрной дыры и горизонта Коши соответственно.

Используя метод Гамильтона-Якоби, можно получить компоненты 4-скорости U^i для свободно-падающей массивной частицы. Однако вместо метода Гамильтона-Якоби, здесь проще использовать уравнения геодезических для частицы (см. [2], [3] §87):

$$\frac{dU_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}U^j U^l \tag{11}$$

Тогда для метрики (10) и для i, соответствующего t-координате имеем интеграл движения: $U_t := \epsilon = const$; а для i, соответствующего θ-координате имеем интеграл движения: $U_\theta := h\epsilon = const$.

С учетом тождества $U_i U^i \equiv 1$, имеем:

$$U^t = \frac{\epsilon}{f}, \qquad \frac{dr}{ds} := U^r = -\sqrt{\epsilon^2 - f(1 + h_\epsilon^2\epsilon^2/r^2)}, \qquad U^\theta = -\frac{h\epsilon}{r^2}. \tag{12}$$

Здесь знак минус перед корнем был нами выбран в соответствии с направлением движения в сторону центра. Отсюда для радиального падения массивной частицы ($h_\epsilon = 0$) получаем ненулевые компоненты U^i:

$$U^t = \frac{\epsilon}{f}, \qquad U^r = -\sqrt{\epsilon^2 - f}. \tag{13}$$

Переход к безмассовым частицам осуществляется заменой в (12) $U^i \to \epsilon\Psi^i$ и пределом $\epsilon \to \infty$:

$$\Psi^t = \Psi_t/f(r), \qquad \Psi^r = \pm\Psi_t\sqrt{1 - h^2 f/r^2}, \qquad \Psi^\theta = -\frac{h\Psi_t}{r^2}. \tag{14}$$

Здесь Ψ^i – нулевой 4-вектор фотона: $\Psi^i\,\Psi^j g_{ij}=0$. Причем компоненты нулевого 4-вектора Ψ^i зависят от r, от h и от координат пылинки оболочки в момент излучения ею данного фотона, но зависимости от r и от координат пылинки я далее везде опускаю (подразумевая их существование). Выражение (14) справедливо для отдельного фотона, вдоль всей его траектории, причем аналогично массивным частицам: Ψ_t и $\Psi_\theta := h\Psi_t$ – интегралы движения для фотона. Аналогично выражению (12), знак плюс в выражении (14) соответствует направлению излучения фотона от центра, а знак минус – к центру.

Зная 4-векторы, получаем функцию $F_{shell}(r)$ для массивных частиц и функцию $F_{photon}(r,h)$ – для фотонов:

$$F_{shell}(r)=\frac{1}{f\sqrt{1-f/\epsilon^2}}\,,\qquad F_{photon}(r,h)=\frac{1}{f\sqrt{1-h^2f/r^2}}\,. \tag{15}$$

IV. КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ Z ВИДИМОЙ ОБОЛОЧКИ

В сопутствующей излучающей пылинке системе отсчета скалярное произведение 4-вектора фотона ψ_i на 4-вектор скорости наблюдателя $u^i := \{1,0,0,0\}$ равно собственной частоте фотона $w_{shell} := u^i\psi_i$. Поскольку скалярное произведение является инвариантом, то в системе Рейснера-Нордстрема в той же точке излучения также имеем:

$$w_{shell}=u^i\psi_i=\Psi_i\,U^i=\Psi_t U^t+\Psi_r U^r \tag{16}$$

В данном случае компоненты 4-скорости U^i являются компонентами 4-скорости самой пылинки в системе Рейснера-Нордстрема. С учетом (14) выражение (16) на пылевой оболочке переписывается в виде:

$$w_{shell}=\Psi_t(h)\left[U^t_{shell}-U^r_{shell}\frac{\sqrt{1-h^2 f_{shell}/r^2_{shell}}}{f_{shell}}\right] \tag{17}$$

Знак плюс в выражении (14) для Ψ^r был выбран нами в соответствии с направлением излучения фотона от центра. Обратим внимание, что на горизонте знаменатели в выражении (17) обращаются в нуль, и выражение становится сингулярным. Это соответствует тому, что функция $\Psi_t(h)$ для излучаемого оболочкой фотона стремится к нулю (при приближении оболочки к горизонту). А для фотона, направленного в сторону центра (знак минус в выражении (14)), напротив – сингулярности взаимно вычитаются и итоговая частота w_{shell} (а также функция $\Psi_t(h)$) везде конечна.

Аналогично (17), в точке поглощения фотона имеем для частоты w_{obs^k}, измеряемой наблюдателем:

$$w_{obs^k} := \Psi_i^{obs^k} U^i_{obs^k} = \Psi_t(h) \left[U^t_{obs^k} - U^r_{obs^k} \frac{\sqrt{1 - h^2 f_{obs^k}/r^2_{obs^k}}}{f_{obs^k}} \right] \tag{18}$$

Доплеровское смещение z определяется отношением частот $RS := w_{shell}/w_{obs^k}$:

$$1 + z := RS = \frac{w_{shell}}{w_{obs^k}} = \frac{f_{obs^k}}{f_{shell}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - f_{shell}\left[1/\epsilon^2 + h^2\left(1 - f_{shell}/\epsilon^2\right)/r^2_{shell}\right]}}{1 + \sqrt{1 - f_{obs^k}\left[1/\epsilon^2 + h^2\left(1 - f_{obs^k}/\epsilon^2\right)/r^2_{obs^k}\right]}} \tag{19}$$

Можно показать, что отношение $RS = w_{shell}/w_{obs^k}$ остается конечным даже около горизонта. Для этого заметим, что при приближении к горизонту функция f_{shell} становится маленькой. Время t_{obs^k} поглощения фотона (испущенного оболочкой на радиусе r_{shell}) соответствует радиусу наблюдателя r_{obs^k}. При этом соответствующая функция f_{obs^k} имеет тот же порядок малости, что и функция f_{shell} (для одного и того же фотона).

Предположим (для упрощения вычислений), что величина ϵ для наблюдателя такая же, как и для пылевой оболочки, т.е. $F_{obs} := F_{shell}$. Запишем следующее равенство:

$$t_{obs^k} = t_{shell^k} + \Delta t_{photon^k} \tag{20}$$

здесь [см. (3 - 4)]:

$$t_{obs^k} = \int_{r_{obs^k}}^{r_{obs^0}} F_{shell}\, dr\,, \tag{21}$$

$$t_{shell^k} = t_{shell^0} + \int_{r_{shell^k}}^{r_{shell^0}} F_{shell}\, dr\,, \tag{22}$$

$$t_{shell^0} = -\Delta t_{photon^0} = -\int_{r_{shell^0}}^{r_{obs^0}} F_{photon}(r,0)\, dr\,, \tag{23}$$

$$\Delta t_{photon^k} := \int_{r_{shell^k}}^{r_{obs^k}} F_{photon}(r,0)\, dr\,. \tag{24}$$

Подставляя интегралы (21 - 24) в равенство (20), и сокращая пересекающиеся участки интегрирования, получаем:

$$T_0 := \int_{r_{shell^0}}^{r_{obs^0}} F_{sum}\, dr = \int_{r_{shell^k}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\, dr\,, \quad F_{sum}(r) := F_{shell}(r) + F_{photon}(r,0)\,. \tag{25}$$

Величина T_0 определяется из начальных условий, она имеет смысл времени (в системе Рейснера-Нордстрема), необходимого фотону, испущенному с оболочки, чтобы преодолеть расстояние до местоположения наблюдателя в начальный момент времени $t_{obs^0} = 0$, плюс времени, необходимого наблюдателю, чтобы преодолеть это же расстояние (до местоположения оболочки в момент t_{shell^0}). Однако, это не означает, что обязательно нужно начинать численное интегрирование нашей модели именно со значений радиусов r_{obs^0} и r_{shell^0}. С таким же успехом можно начать численное интегрирование нашей модели с любых значений радиусов r_{obs^k} и r_{shell^k}, удовлетворяющих формуле (25). Таким образом, первоначальное задание значений радиусов r_{obs^0} и r_{shell^0} определяет дальнейшее соотношение между радиусами r_{obs^k} и r_{shell^k} через интеграл в (25) для T_0.

Если к обеим частям выражения (25) добавить следующую разность интегралов:

$$\int\limits_{r_{obs^0}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\, dr - \int\limits_{r_{shell^0}}^{r_{shell^k}} F_{sum}\, dr = 0, \tag{26}$$

то выражение (25) от этого не изменится, поэтому разность интегралов в (26) должна быть равна нулю.

Для выяснения величины красного смещения, согласно (19), нам достаточно знать две величины: f_{obs^k} и f_{shell^k}. При этом величины r_{obs^k} и f_{obs^k} можно задать самим, а величины r_{shell^k} и f_{shell^k} вычислить по формуле (26) – проинтегрировать там F_{sum} до достижения нуля. Конечная точка интегрирования во втором интеграле (26) и будет радиусом r_{shell^k}, из неё определяем f_{shell^k}.

Величину радиуса r_{shell}, необходимого для вычисления f_{shell} и красного смещения фотона с произвольным прицельным параметром $h > 0$, вычисляем по формуле (7), причем необходимую для этого вычисления величину t_{shell^0} получаем также интегрированием по формуле (23):

$$\int\limits_{r_{shell}}^{r_{obs^0}} F_{photon}(r,h)\, dr - \int\limits_{r_{shell^0}}^{r_{obs^0}} F_{photon}(r,0)\, dr = \int\limits_{r_{shell_0}}^{r_{shell}} F_{shell}(r)\, dr \tag{27}$$

В пределе, когда $r_{shell^k} \to r_h$, $r_{obs^k} \to r_h$, $f_{shell^k} \to 0$ и $f_{obs^k} \to 0$, для функции $F_{sum}(r)$ получаем асимптотику: $F_{sum}(r) \to 2/f(r)$. Тогда интеграл в (25) также имеет асимптотику:

$$\int\limits_{r_{shell^k}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\,dr \to \frac{2r_h^2}{r_h - r_c}\ln\left(\frac{r_{obs^k} - r_h}{r_{shell^k} - r_h}\right) \tag{28}$$

Отсюда имеем:

$$\frac{f_{obs^k}}{f_{shell^k}} \to \frac{r_{obs^k} - r_h}{r_{shell^k} - r_h} \to \exp\left[\frac{T_0(r_h - r_c)}{2r_h^2}\right] \tag{29}$$

Отсюда видно, что величина $f_{obs^k}/f_{shell^k} \to f_{obs^{h+}}/f_{shell^{h+}}$ является конечной на горизонте[2], поэтому и красное смещение RS_h на горизонте также останется конечным:

$$RS_h = \frac{w_{shell^h}}{w_{obs^h}} \to \exp\left[\frac{T_0(r_h - r_c)}{2r_h^2}\right] \tag{30}$$

Отсюда видно, что при $T_0 > 0$ или $r_{obs^0} > r_{shell^0}$ смещение частоты у горизонта будет красным.

Вывод: из-за выбора Рейснер-Нордстремовской системы координат, нельзя непрерывно переходить горизонты в численном интегрировании. Но пределы выражения (19) слева и справа от горизонта совпадают, также как и пределы отношения f_{obs^k}/f_{shell^k}, поэтому можно продолжать интегрирование после горизонта, с такими же предельными параметрами, как и перед ним.

Эти и дальнейшие рассуждения прекрасно согласуются с мембранной парадигмой чёрных дыр – см. [4].

V. ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ

Поскольку все фотоны, испущенные вверх, вне горизонтов могут быть наблюдаемы также только вне горизонтов, а фотоны, испущенные между горизонтами также могут быть наблюдаемы только между горизонтами, то эти две области оказываются не связанными друг с другом (в вышеуказанном смысле).

В обычной R-области (до падения в черную дыру), как видно из (19), величина красного смещения определяется только значениями радиусов r_{shell} и r_{obs^k} – точкой излучения фотона и точкой его поглощения. Можно сказать и так, что величина красного

[2] Здесь я обозначил индексом "h+" величины, на которых остановил численное интегрирование перед горизонтом r_h.

смещения определяется соотношением модулей величин $f(r)$ – на радиусах излучения и поглощения фотона. Поэтому во внешней R-области у радиального фотона всегда будет уменьшение частоты (покраснение). Что касается нерадиального фотона (излученного с $h > 0$), то ему нужно больше времени (чем радиальному фотону) для достижения наблюдателя в тот же момент времени, в который наблюдателя достигает радиальный фотон. Поэтому нерадиальный фотон должен быть излучен оболочкой раньше, т.е. на большем радиусе. Это может привести к тому, что нерадиальные фотоны будут испытывать синее-фиолетовое смещение частоты, при поглощении их наблюдателем (для достаточно больших значений h). Реально эти "сине-фиолетовые" фотоны соответствуют излучению оболочки внутрь себя (фотоны идущие вниз).

В T-области между горизонтами с нашей моделью начинают происходить удивительные вещи! Излученный наружу с оболочки радиальный фотон пытается двигаться вверх, но сила гравитации настолько велика, что его всё равно "сносит" вниз. Через какое-то время наблюдатель "догоняет" этот фотон... Таким образом, оказывается, что в T-области точка наблюдения ВСЕГДА имеет меньший радиус (r_{obs}), чем точка излучения (r_{shell}). Такие "парадоксы" свойственны только T-области, расположенной между горизонтами черной дыры. По-прежнему наблюдатель все еще видит красное смещение радиальных фотонов (в начале T-области).

Поскольку функция $f(r)$ немонотонна в T-области, то модуль функции $f(r)$ достигает максимума в T-области и потом опять уменьшается до нуля – на горизонте Коши r_c. Поэтому наступит момент, когда функции $f(r)$ будут одинаковы для точки излучения и точки поглощения фотона. Этот момент будет соответствовать отсутствию сдвига его частоты. После этого момента ситуация изменится – наблюдатель начнет видеть сине-фиолетовое смещение частоты для радиальных фотонов.

Для нерадиальных фотонов ситуация здесь оказывается менее предсказуемой: всё зависит от того – с какого радиуса (от какой величины $|f(r)|$) пришел к наблюдателю нерадиальный фотон. По тем же причинам что и в R-области, нерадиальным фотонам нужно больше времени, чем радиальным, поэтому они должны быть излучены оболочкой на большем радиусе (ближе к внешнему горизонту r_h). Поэтому (в силу немонотонности функции $f(r)$ в T-области) могут быть варианты как с красным, так и с сине-фиолетовым смещением частоты для нерадиальных фотонов.

Однако тут есть одно существенное замечание: сразу под горизонтом r_h наблюдатель не может видеть сине-фиолетовое смещение ни для каких фотонов. Это связано с тем, что все излучающие оболочки (как для радиальных, так и для нерадиальных фотонов) находятся на больших радиусах (но под r_h), поэтому смещение частоты будет только красным. В связи с этим и сразу над горизонтом r_h (во внешней R-области) смещение частоты для наблюдателя может быть только красным. Это связано с тем, что наблюдатель должен видеть только непрерывное изменение смещения частоты. Возможно, что наблюдатель перед достижением горизонта r_h просто перестает видеть такие "сине-фиолетовые" фотоны, приходящие к нему от внутренней части оболочки с достаточно большими значениями h.

Во внутренней R2-области (под горизонтом Коши r_c) ситуация опять меняется кардинально. Теперь излученные радиально вверх с оболочки фотоны могут "преодолеть" силу гравитации и двигаться вверх – к подлетающему наблюдателю. Наблюдатель увидит эти радиальные фотоны на большем радиусе (но при меньшем значении функции $f(r)$), чем в момент излучения. Это по-прежнему будет соответствовать сине-фиолетовому смещению радиальных фотонов. Теперь наблюдатель в R2-области уже не может видеть фотоны, испущенные вверх в T-области, т.к. эти фотоны "дрейфуют" вниз только до горизонта Коши r_c, а потом на нем и остаются. Поэтому наблюдатель видит фотоны только из своей R2-области[3], а они приходят к нему с больших радиусов (ближе к горизонту Коши r_c). Таким образом, опять может оказаться ситуация когда нерадиальный фотон из R2-области придет к наблюдателю с радиуса большего, чем на котором он сам его наблюдает. В таком случае наблюдатель увидит этот нерадиальный фотон красным. Поэтому во внутренней R2-области наблюдатель также сможет видеть как сине-фиолетовое, так и красное (для достаточно больших h) смещение частоты фотонов.

VI. ДВИЖЕНИЕ МЕЖДУ ГОРИЗОНТАМИ

Все предыдущие рассуждения и формулы в T-области между горизонтами остаются теми же. Поэтому в формулах (21-26) имеет смысл заменить индексы "0" на индексы "h-" – относящиеся к горизонту r_h (индекс минус означает под горизонтом). При этом

[3] Как я уже говорил выше, наблюдатель может видеть фотоны (испущенные вверх), только из той же области, в которой находится он сам в данный момент.

в Т-области знак у выражений f, F_{shell} и F_{photon} меняется на противоположный, это обеспечивает нужное направление для фотонов, поскольку излученные наружу фотоны в этой области "сносит" к центру.

Очевидно (и проверяемо в сопутствующей системе отсчета), что наблюдатель, пролетая через горизонт r_h не заметит каких-либо скачков или особенностей в красном смещении фотонов, приходящих к нему от оболочки. Поэтому в асимптотике (сразу под горизонтом r_h) имеем: $r_{obs^{h-}} \to r_h$, $r_{shell^{h-}} \to r_h$, $f_{obs^{h-}} \to 0$ и $f_{shell^{h-}} \to 0$. С другой стороны, согласно (29) и (30), имеем:

$$RS_h = \frac{w_{shell^h}}{w_{obs^h}} = \exp\left[\frac{T_0(r_h - r_c)}{2r_h^2}\right] \to \frac{f_{obs^{h-}}}{f_{shell^{h-}}} \to \frac{r_{obs^{h-}} - r_h}{r_{shell^{h-}} - r_h} \tag{31}$$

Отсюда:

$$r_{shell^{h-}} = r_h + \frac{r_{obs^{h-}} - r_h}{RS_h} \tag{32}$$

Поэтому для продолжения численного интегрирования под горизонтом r_h нам достаточно взять малое значение $f_{obs^{h-}} = -f_{obs^{h+}}$ (и соответствующий ему $r_{obs^{h-}}$, на котором я остановил численное интегрирование перед горизонтом r_h), из формулы (32) получить радиус $r_{shell^{h-}}$, и с этими значениями продолжить интегрирование, согласно аналогу формулы (26):

$$\int\limits_{r_{obs^{h-}}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\, dr - \int\limits_{r_{shell^{h-}}}^{r_{shell^k}} F_{sum}\, dr = 0 \tag{33}$$

Кроме этого, можно записать аналог формулы (25):

$$T_0 := \int\limits_{r_{shell^{h-}}}^{r_{obs^{h-}}} F_{sum}\, dr = \int\limits_{r_{shell^k}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\, dr\,, \quad F_{sum}(r \in T) < 0\,, \quad r_{obs^{h-}} < r_{shell^{h-}}\,. \tag{34}$$

Аналогично получению (31), из выражения (34) в пределе $r_{obs^k} \to r_c$ и $r_{shell^k} \to r_c$ можем также выразить соотношение радиусов $r_{obs^{c+}}$ и $r_{shell^{c+}}$ (у горизонта Коши r_c):

$$RS_c = \frac{w_{shell^c}}{w_{obs^c}} \to \frac{f_{obs^{c+}}}{f_{shell^{c+}}} \to \frac{r_{obs^{c+}} - r_c}{r_{shell^{c+}} - r_c} \to \exp\left[\frac{-T_0(r_h - r_c)}{2r_c^2}\right] = (RS_h)^{-r_h^2/r_c^2} \tag{35}$$

Отсюда видно, что смещение частоты у горизонта Коши r_c для радиальных фотонов будет сине-фиолетовым, т.е. таким, каким оно и было предсказано нами в предыдущем разделе.

VII. ДВИЖЕНИЕ ПОД ГОРИЗОНТОМ КОШИ

В R2-области (под горизонтом Коши r_c) всё оказывается аналогично предыдущим рассуждениям:

$$\int\limits_{r_{obs^{c-}}}^{r_{obs^k}} F_{sum}\,dr - \int\limits_{r_{shell^{c-}}}^{r_{shell^k}} F_{sum}\,dr = 0 \tag{36}$$

Аналогично (35) получаем:

$$\frac{r_c - r_{obs^{c-}}}{r_c - r_{shell^{c-}}} = RS_c \tag{37}$$

Далее интегрирование можно продолжать вплоть до точки горловины r_{turn}, соответствующей равенству $f(r_{turn}) = \epsilon^2$ (см. 13):

$$r_{turn} = \frac{r_h + r_c}{2(\epsilon^2 - 1)}\left[\sqrt{1 + \frac{4r_h r_c(\epsilon^2 - 1)}{(r_h + r_c)^2}} - 1\right] \tag{38}$$

После точки горловины (динамической кротовой норы Рейснера-Нордстрема) материя начинает расширяться в направлении другой вселенной – в топологии общей Мультивселенной Рейснера-Нордстрема (аналогично тому, как это должно происходить и в топологии Мультивселенной для решения Керра). Но эти эффекты я не собираюсь обсуждать в данной работе.

VIII. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ОТ ОБОЛОЧКИ

Интенсивность (или как более правильно её называть) плотность потока энергии I определяется отношением потока фотонов, приходящих к наблюдателю (а я рассматриваю только такие фотоны), к элементу телесного угла, из которого эти фотоны приходят за единицу собственного времени.

Рассмотрим элемент нашей пылевой оболочки в диапазоне углов от θ_{shell} до $\theta_{shell} + d\theta_{shell}$ (тонкое кольцо с радиусом $2\pi r_{shell}\sin\theta_{shell}$). Поток фотонов от этого элемента пропорционален величине $\sin\theta_{shell}\,d\theta_{shell}$.

Элемент телесного угла в точке наблюдения также лежит в диапазоне углов от α_{obs^k} до $\alpha_{obs^k} + d\alpha_{obs^k}$, причем угол α_{obs^k} соответствует углу между осью Z и направлением прихода фотона в точке наблюдения. Поэтому элемент телесного угла у наблюдателя равен $\sin\alpha_{obs^k}\, d\alpha_{obs^k}$.

Таким образом, получаем для распределения I:

$$I(\alpha_{obs^k}) \propto \frac{\sin\theta_{shell}\, d\theta_{shell}/dh}{\sin\alpha_{obs^k}\, d\alpha_{obs^k}/dh} \cdot \left(\frac{d\tau_{obs^k}}{d\tau_{shell}}\right)^{-2} \tag{39}$$

Здесь $d\tau_{obs^k}/d\tau_{shell}$ – отношение элементов собственного времени для наблюдателя и оболочки, которое равно отношению собственных частот: RS – см. (19). Еще один множитель RS возникает в (39) из-за изменения энергии фотонов, дошедших до наблюдателя – нужно также учитывать и этот фактор при вычислении плотности потока энергии.

Поэтому для решения данной задачи нам нужно ввести инвариантное определение углов между нулевыми геодезическими для фотонов в точках излучения и поглощения фотонов (по отдельности). Поскольку нас интересует угол между радиальной геодезической фотона ($h = 0$) и геодезической, имеющей прицельный параметр $h > 0$, в одной и той же точке, то нам потребуется следующий 4-вектор[4]:

$$A_i := E_{ijml}\, U^j\, \Psi^m(0)\, \Psi^l(h)\,, \quad A^i := E^{ijml}\, U_j\, \Psi_m(0)\, \Psi_l(h)\,. \tag{40}$$

Здесь: $E_{ijml} = e_{ijml}\sqrt{-g}$ и $E^{ijml} = e_{ijml}/\sqrt{-g}$ – единичные, абсолютно антисимметричные тензора 4-го ранга – см. [3] §83; g – детерминант нашего метрического тензора; U^j – радиальный 4-вектор скорости наблюдателя или оболочки; $\Psi^m(0)$ – нулевой 4-вектор радиального фотона с $h = 0$; $\Psi^l(h)$ – нулевой 4-вектор нерадиального фотона с $h > 0$.

Можно убедиться, что в нашей модели у 4-вектора A_i есть только одна ненулевая (аксиальная) компонента:

$$A_i = -\delta_i^\varphi \sqrt{-g}\left[U^t\, \Psi^r(0) - U^r\, \Psi^t(0)\right]\, \Psi^\theta(h) \tag{41}$$

Аналогично, для контравариантных компонент 4-вектора A^i получаем:

$$A^i = \frac{-\delta^i_\varphi}{\sqrt{-g}}\left[U_t\, \Psi_r(0) - U_r\, \Psi_t(0)\right]\, \Psi_\theta(h) \tag{42}$$

---

[4] В выражение для 4-вектора A_i входит антисимметричный по всем четырем индексам единичный тензор, поэтому (строго говоря) умножаться этот единичный тензор должен также на антисимметричный тензор $\Psi^{ml} := \left[\Psi^m(0)\,\Psi^l(h) - \Psi^l(0)\,\Psi^m(h)\right]/2$, но при умножении нужно брать только антисимметричную часть от $\Psi^m(0)\,\Psi^l(h)$, поскольку его симметричная часть после умножения даёт нуль.

Отсюда получаем скаляр $A^2 := A_i A^i$:

$$A^2 = -\left(U^t \Psi_t(0) + U^r \Psi_r(0)\right)^2 \Psi_\theta(h)\Psi^\theta(h) = -\left(U^j \Psi_j(0)\right)^2 \Psi_\theta(h)\Psi^\theta(h) \tag{43}$$

Отсюда видно, что имеет смысл ввести еще один 4-вектор:

$$B_i := \frac{A_i}{U^j \Psi_j(0)} \tag{44}$$

Тогда для скаляра $B^2 := B_j B^j$ получаем следующее инвариантное значение:

$$B^2 = \frac{\Psi_\theta^2(h)}{r^2} = \frac{h^2 \Psi_t^2(h)}{r^2} \tag{45}$$

Величина h^2/r^2 по своему физическому смыслу совпадает с квадратом синуса угла между геодезическими радиального и нерадиального фотонов на радиусе r, а интеграл движения $\Psi_t(h)$ не меняется от точки излучения до точки поглощения фотона.

Инвариантное выражение (45), как раз то, которое нам нужно, поскольку оно справедливо также и в сопутствующей, свободно-падающей системе отсчёта. Тогда формула (39) переписывается в инвариантном виде:

$$I(\alpha_{obs^k}) \propto RS^{-2} \cdot \frac{r_{obs^k}\sqrt{r_{obs^k}^2 - h^2}}{r_{shell}\sqrt{r_{shell}^2 - h^2}} \tag{46}$$

IX. КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ

При $h \to r_{shell}$ плотность потока энергии (46) на краях видимого диска стремится к бесконечности. Это не ошибка! Связано это с тем, что у самого края к нам приходят фотоны от многих колец излучающих пылинок с нашей оболочки. Аналогичный эффект виден, например, при наблюдении атмосферы Земли из космоса – освещаемая Солнцем, атмосфера по краю начинает светиться сильнее, чем в центре (и становится видимой). Однако, если в нашей модели считать все кольца пыли абсолютно непрозрачными для света, то выражение (46) должно быть умножено на $\cos\alpha_{shell} = \sqrt{1 - h^2/r_{shell}^2}$. Но это другая крайность. Для того чтобы учесть разные возможные варианты прозрачности пылевых колец введём коэффициент $\kappa \in [0,\, 1]$ в формуле для I:

$$I(\alpha_{obs^k}) \propto RS^{-2} \cdot \frac{r_{obs^k}\sqrt{r_{obs^k}^2 - h^2}}{r_{shell}\sqrt{r_{shell}^2 - \kappa h^2}} \tag{47}$$

Тогда $\kappa = 0$ будет соответствовать абсолютной непрозрачности, а $\kappa = 1$ – абсолютной прозрачности колец пыли.

Полный угол отклонения фотона при движении от оболочки до наблюдателя определяется из выражений (14):

$$\theta_{tot} = \int\limits_{r_{shell}}^{r_{obs^k}} \frac{h\,dr}{r\sqrt{r^2 - h^2 f}} \tag{48}$$

Отсюда максимально-возможный прицельный параметр[5] для данного r определяется формулой $h_{max} = r/\sqrt{f}$, а в T-области возможны любые прицельные параметры. Причем для h_{max} угол отклонения фотона всё равно будет конечным, несмотря на (слабую) особенность в знаменателе выражения (48). Этот факт принципиально отличается от наблюдения фотонов покоящимся (в системе Рейснера-Нордстрема) наблюдателем – там углы отклонения фотонов могут достигать бесконечности, т.к. при достаточно больших h фотон делает бесконечное число витков вокруг черной дыры, прежде чем достигает покоящегося наблюдателя.

X. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

Главным результатом данной работы можно считать программу (код), благодаря которой можно синтезировать видеоролики, иллюстрирующие то, как будет выглядеть пылевая оболочка для падающего наблюдателя.

Визуализация (на видеокадрах) смещения частоты RS требует детальных пояснений.

Минимальная частота света, воспринимаемая человеческим глазом, соответствует красному цвету, а максимальная – фиолетовому цвету. Однако в технических приборах (мониторы и видеопроекторы) вся доступная цветовая гамма получается смешиванием 3-х цветовых каналов **RGB** (красного, зелёного и синего). Таким образом, фиолетового цвета среди этих каналов нет. Между тем фиолетовый цвет обладает максимальной частотой в диапазоне видимого цвета и находится в этом диапазоне правее синего цвета, и поэтому, казалось бы, он не может быть получен смешиванием остальных цветов из

[5] Этот максимально-возможный прицельный параметр h_{max} не достигается в нашем случае, как видно из формулы (47).

видимого диапазона. Парадоксально, но человеческий глаз воспринимает искусственно-синтезированный фиолетовый цвет как равнодолевую смесь красного **R** и синего **B** каналов (или цветов). Этот факт вносит некоторые сложности в синтез видеороликов, т.к. каналы **R** и **B** соответствуют почти противоположным концам естественной цветовой гаммы, видимой человеческим глазом.

Для того чтобы сделать отображение цветов в видеороликах максимально соответствующим реальности разумно ввести в модель предположение, что оболочка будет излучать монохромную линию для собственной частоты. Я выбрал для этой монохромной линии чисто зелёный цвет (технически здесь отображается только один зелёный канал **G**).

Со смещением частоты в красную область всё более-менее ясно: я определил красное смещение на горизонте чёрной дыры соответствующим только красному каналу **R**. Между этими отдельными каналами (**G** и **R**) происходит плавное изменение частоты, т.е. **R** и **G** каналы дают плавно-меняющийся долевой вклад в общую картину цветности.

При дальнейшем смещении частоты в фиолетовую сторону я определил цвет на горизонте Коши как вклад только от синего канала **B**. Между горизонтами происходит постепенное изменение цвета от чисто красного (только канал **R**) до чисто синего (только канал **B**), с плавным прохождением через чисто зелёный цвет (только канал **G** – собственная частота оболочки). Разумеется, что для каждой точки пылевой оболочки эти плавные изменения цвета будут своими собственными, гладко и непрерывно связанными с соседними точками.

Под горизонтом Коши происходит дальнейшее увеличение частоты (т.е. сокращение длины волны света), поэтому нулевой длине волны я поставил в соответствие равнодолевой вклад от красного **R** и синего **B** каналов – т.е. искусственно-синтезированный фиолетовый цвет.

Конечно, такая искусственная цветовая гамма далеко не полностью соответствует тому, что видит человеческий глаз в реальности, но зато эта модель максимально передает все изменения в смещении частоты от монохромной зелёной линии излучающей пылинки. Кроме этого, наблюдать ведь можно не только человеческим глазом, а (в основном) техническими средствами – видеокамерами, которые, как известно, могут работать в разных диапазонах длин волн излучения.

По поводу визуализации интенсивности излучения всё более-менее ясно – для ее изменения достаточно синхронно изменять весовые вклады от всех каналов **RGB** в диапазоне от нуля до 255 (технически максимально-возможной величины).

На правой части кадров всех видеороликов представлены графики, синхронно изменяющиеся во времени с основной картинкой: для величин красного смещения (белая кривая), интенсивности (фиолетовая кривая) и полного угла отклонения фотонов (жёлтая кривая) – в зависимости от прицельного параметра фотонов h.

Кроме этого на кадрах построены три горизонтальные постоянные линии: красная – для величины RS на горизонте чёрной дыры, зелёная – для линии обозначающей единицу и синяя – для величины RS на горизонте Коши.

Внизу отображена шкала радиуса для наблюдателя (помеченного жёлтой меткой), ближайшей к наблюдателю точки пылевой оболочки (помеченной зелёной меткой), максимально-удалённой от наблюдателя точки пылевой оболочки, от которой к наблюдателю приходят фотоны (помеченной тонкой белой меткой), а также местоположение горизонта чёрной дыры (красная метка), горизонта Коши (синяя метка) и точки горловины (фиолетовая метка).

Видеоролик, соответствующий чёрной дыре Рейснера-Нордстрема с $r_c = 0.5 r_h$, можно посмотреть по адресу: shatskiyalex.ru/red_shift_20.mp4.

Видеоролик, соответствующий чёрной дыре Шварцшильда, можно посмотреть по адресу: shatskiyalex.ru/red_shift24.mp4.

Сверху и снизу каждого видеокадра представлены строки со всеми текущими параметрами для данного видеоролика.

XI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как подтверждают все предыдущие аналитические рассуждения, численные результаты, отображенные в видеороликах, показывают, что прохождение наблюдателя через оба горизонта и через точку горловины r_{turn} протекает гладко и непрерывно – в т.ч. и в смысле наблюдения разных элементов пылевой оболочки.

XII. БЛАГОДАРНОСТИ

Я искренне благодарен Алексею Топоренскому и Олегу Заславскому за все идеи, замечания и обсуждения, высказанные на этапе подготовки данной работы.

---

[1] А.А. Шацкий, И.Д. Новиков, Л.Н. Липатова, АЖ **91**, 87 (2014).

[2] G.C. Graves, D.R. Brill, Phys. Rev. **120**, 1507 (1960).

[3] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Теория поля, II том* (Москва, Наука, 1988).

[4] *Черные дыры. Мембранный подход* (Москва, Мир, 1998), Под ред. К. Торна, Р. Прайса и Д. Магдональда ed.